

# Aspetti probabilistici del gioco d'azzardo

Aldo Solari  
STATISTICA

Piano Lauree Scientifiche  
Milano, 21 Febbraio 2019



# Outline

- 1 Il Calcolo delle Probabilità
- 2 Scommessa equa, favorevole e sfavorevole
- 3 Problema 1: la Liberty Bell
- 4 Problema 2: la rovina del giocatore
- 5 Problema 3: compleanni
- 6 Kahoot



# Il Calcolo delle Probabilità

I primi studi:

**1526** *Liber de ludo aleæ* di Girolamo **Cardano**

**1612** *Sopra le scoperte de i dadi* di Galileo **Galilei**

**1654** Carteggio tra Blaise **Pascal** e Pierre de **Fermat**

**1657** *Libellus de ratiociniis in ludo aleæ* di Christiaan **Huygens**

**1713** *Ars conjectandi* di Jakob **Bernoulli**



# Girolamo Cardano

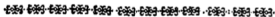


Pavia, 24 Settembre 1501 - Roma, 21 Settembre 1576





LIBER  
DE LUDO  
ALEÆ.



CAPVT PRIMVM.

*De Ludorum generibus.*



VDI constant, aut agilitate corporis, velut Pila; aut robore, vt Discus, & Lucta, aut industriã, vt Latruncolorum, aut fortunã, vt Aleæ propriè, & Talorum; aut vtroque, vt Fritilli. Industria autem duplex,

lius fuerit, atque id ob tres causas; Prima, quodd huiusmodi intermissio seriarum actionum laudabilior est, quàm Ludi, vt quæ vel faciat aliquid, vt Pictura, vel sit secundum naturam, vt Musica, vel homo aliquid discat, vt legendo audiendove fabulas, historiasve. Secunda, quodd non sit sine labore, & ided non inuitis nobis, plus temporis nobis eripiat, quàm par sit: Tempus autem, (vt Seneca aiebat) & rectè dum de longitudine, & breuitate vitæ loquitur, res est charissima. Tertia, quodd honestius sit otium illud, & non



# Spazio campionario

Lo **spazio campionario**  $\Omega$  è l'insieme dei possibili risultati di un esperimento casuale. Ad esempio:

- Lancio di una moneta:

$$\Omega = \{\text{testa, croce}\}$$

- Lancio di due monete:

$$\Omega = \{(\text{testa, testa}), (\text{testa, croce}), (\text{croce, testa}), (\text{croce, croce})\}$$

- Lancio di un dado:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- Etc.



# Probabilità di un evento

- Un **evento**  $E$  è un sottoinsieme di  $\Omega$ :  $E \subseteq \Omega$
- Se tutti gli elementi di  $\Omega$  sono **equiprobabili**, allora la **probabilità di un evento** è definita da

$$P(E) = \frac{\text{numero dei casi favorevoli all'evento}}{\text{numero dei casi possibili}}$$

- In maniera più formale:

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}$$

dove  $|E|$  indica la cardinalità (numero di elementi) di  $E$



# Lancio di un dado

$E = \text{“esce il numero 6”}$

$$P(E) = \frac{\text{■ ■ ■}}{\text{□ ■ ■ ■ ■ ■}} = \frac{1}{6} \approx 16.7\%$$

---

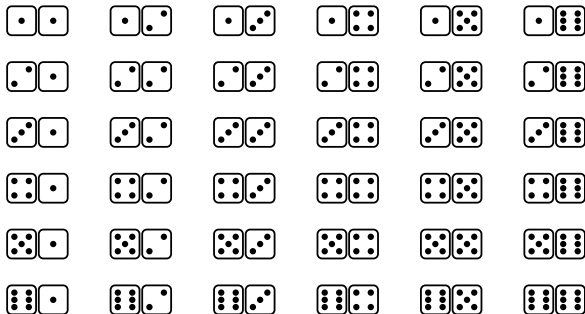
$E = \text{“esce un numero dispari”}$

$$P(E) = \frac{\text{■ ■ ■}}{\text{□ ■ ■ ■ ■ ■}} = \frac{3}{6} = 50\%$$





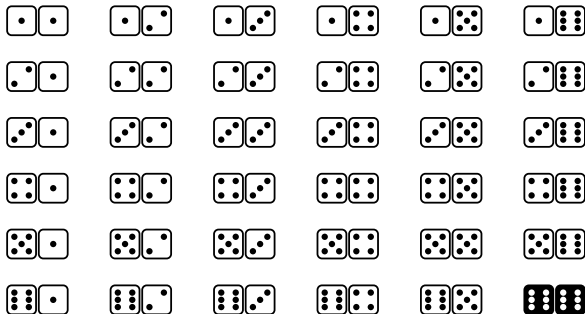
# Lancio di due dadi



Casi possibili (equiprobabili) =  $6 \times 6 = 36$



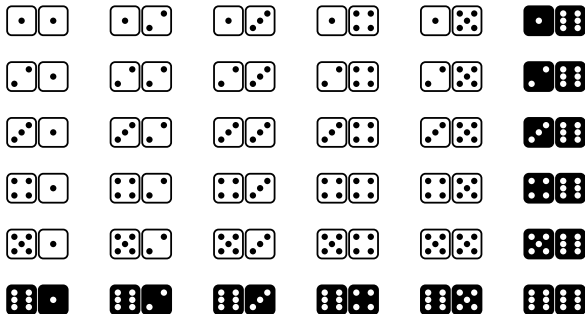
# Lancio di due dadi



$E = \text{“esce un doppio 6”}$ ,  $P(E) = \frac{1}{36} \approx 2.8\%$



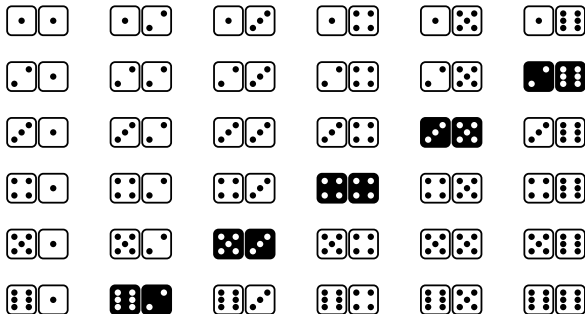
# Lancio di due dadi



$E = \text{"esce almeno un 6"} , \quad P(E) = \frac{11}{36} \approx 30.6\%$



# Lancio di due dadi



$$E = \text{"la somma è 8"}, \quad P(E) = \frac{5}{36} \approx 13.9\%$$



# Il problema di Galileo

Consideriamo il lancio di tre dadi e gli eventi

$A$  = la somma dei tre dadi è 10

$B$  = la somma dei tre dadi è 12

*Secondo voi...*

A)  $P(A) < P(B)$

B)  $P(A) = P(B)$

C)  $P(A) > P(B)$



# 1000 lanci

8 11 10 8 7 11 10 12 14 5 10 11 14 15 14 8 8 9 4 10 9 8 5 12 9 15 12 9 13 14 15 6 8 6 12 15 15 10 13 15 13 12  
12 9 13 11 6 8 16 10 10 12 8 10 15 16 12 10 6 8 14 11 10 15 11 11 10 14 9 9 9 11 8 12 8 13 14 11 9 10 15 4 8  
13 11 11 18 7 8 8 13 10 10 10 11 8 16 6 11 7 10 12 11 13 12 13 13 9 12 11 6 15 6 8 10 11 10 15 15 4 13 9 5 9  
16 14 4 7 7 9 12 10 13 6 10 12 7 10 8 7 13 9 16 6 8 11 12 9 12 6 16 3 12 11 5 14 10 14 10 10 12 9 11 8 4 12  
14 10 6 14 7 8 11 15 9 14 12 14 12 10 11 11 13 8 14 12 12 14 5 12 12 13 8 9 10 9 12 10 10 9 11 14 10 8 7 12  
11 6 9 13 11 9 14 12 9 14 16 13 9 12 8 7 14 5 12 10 8 9 9 5 13 5 8 7 12 14 8 4 8 11 11 9 10 13 7 11 8 11 7 5  
11 6 8 13 8 16 16 10 11 12 15 8 9 9 16 10 8 7 8 11 16 16 7 11 8 9 14 9 9 7 8 13 13 6 11 11 7 9 6 8 9 13 7 16  
11 8 7 6 12 10 16 11 11 12 15 11 14 4 6 10 6 9 8 13 8 12 6 12 13 8 12 11 13 17 8 5 8 10 13 14 13 8 8 13 6 11  
9 15 17 9 8 8 10 11 14 9 10 6 5 13 13 8 9 10 11 8 13 13 5 8 7 9 7 11 10 8 10 10 11 6 10 9 12 10 8 6 6 10 9 6  
11 11 14 7 11 15 11 5 14 17 5 15 8 8 12 16 8 5 12 6 7 9 12 10 9 14 10 7 12 11 12 11 11 7 16 10 12 10 13 7 16  
10 9 14 8 11 7 8 14 6 13 9 14 8 16 8 9 11 9 13 13 5 14 11 7 11 12 13 16 8 10 8 8 6 7 10 15 11 12 10 8 11 14  
16 8 10 6 9 8 10 6 6 10 14 10 7 10 12 10 12 10 11 4 10 12 8 8 12 15 11 10 7 15 12 5 12 7 10 14 14 11 14 16 4  
6 9 13 10 8 11 10 14 7 8 10 10 10 12 4 12 11 9 17 14 13 10 11 11 6 9 13 9 13 8 15 11 8 13 14 7 9 10 14 7 11  
12 11 10 13 13 15 8 9 8 10 8 10 9 16 14 8 14 17 9 9 11 8 11 9 13 10 9 11 18 7 10 9 4 11 11 10 8 10 12 10 9 8  
10 10 11 10 4 13 13 10 5 8 14 13 12 13 15 5 10 7 9 10 6 8 10 17 11 14 13 11 8 14 12 12 6 9 10 6 11 11 11 12  
4 9 16 7 8 17 10 4 8 11 11 8 10 12 6 15 15 11 7 9 14 10 10 12 7 10 9 13 12 16 9 12 15 11 11 7 9 8 16 12 13  
12 14 8 9 7 6 11 10 10 14 12 14 10 14 3 9 13 10 11 12 11 12 15 7 5 7 17 7 11 8 5 8 15 12 12 15 14 16 9 7 8 6  
8 13 8 12 8 12 5 12 17 9 15 10 13 11 11 13 7 10 7 7 10 10 15 7 16 8 6 6 11 11 11 7 9 7 13 11 13 12 11 4 8 11  
6 10 8 14 8 13 14 6 7 14 15 10 13 12 8 10 7 11 15 14 15 12 8 7 7 8 16 9 17 13 8 8 11 12 8 9 11 11 8 14 9 14  
10 9 9 9 12 13 13 6 10 13 13 7 9 9 10 11 8 13 8 13 11 6 11 10 17 10 11 15 9 9 9 17 9 7 9 10 11 8 9 8 12 10  
13 10 12 14 16 11 10 15 9 13 8 14 16 12 10 12 10 12 11 11 13 17 7 6 15 6 10 5 6 10 12 9 5 10 9 3 15 12 13 8  
7 6 14 8 6 11 7 9 15 14 7 10 9 15 7 15 7 11 5 12 12 5 12 15 14 8 11 11 10 6 12 7 7 11 14 5 7 9 6 12 8 13 10 8  
12 12 6 9 12 11 15 9 12 11 9 9 9 11 8 10 10 14 9 10 5 12 10 13 12 11 9 7 9 9 12 13 14 7 8 11 11 14 10 11 8  
11 8 15 12 15 15 8 14 16 10 14 5 12 9 9 9 4 12 9 6 11 12 11 4 5 13 11 7 12 15 9 12 10 7 7 10 16 11 10



SOMMA	FREQUENZA
3	3
4	17
5	30
6	54
7	72
8	118
9	108
10	129
11	125
12	104
13	76
14	69
15	48
16	32
17	13
18	2
	1000



# Outline

- ① Il Calcolo delle Probabilità
- ② Scommessa equa, favorevole e sfavorevole**
- ③ Problema 1: la Liberty Bell
- ④ Problema 2: la rovina del giocatore
- ⑤ Problema 3: compleanni
- ⑥ Kahoot





# Payin e payout

## Payin

€ da versare per partecipare ad una certa scommessa

## Payout







€ da ritirare se si vince la scommessa



*Scommessa:* si lancia un dado e si vince il punteggio ottenuto

*Payin:* 3.6 €

*Payout:*

1 €	se esce	
2 €	se esce	
3 €	se esce	
4 €	se esce	
5 €	se esce	
6 €	se esce	

*Secondo voi, si tratta di una scommessa ...*

- A) Equa
- B) Favorevole (per chi scommette)
- C) Sfavorevole (per chi scommette)









# Scommessa equa, favorevole e sfavorevole

- Scommessa equa:  $payin = payout\ medio$
- Scommessa favorevole:  $payin < payout\ medio$
- Scommessa sfavorevole:  $payin > payout\ medio$



# Payout medio

Il *payout* medio si calcola moltiplicando ciascun *payout* per la sua corrispondente probabilità e poi infine sommando i singoli risultati ottenuti

<i>Esito del lancio</i>						
<i>Payout</i>	1	2	3	4	5	6
<i>Probabilità</i>	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

*Payout medio*

$$1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3.5$$



# Outline

- ① Il Calcolo delle Probabilità
- ② Scommessa equa, favorevole e sfavorevole
- ③ Problema 1: la Liberty Bell**
- ④ Problema 2: la rovina del giocatore
- ⑤ Problema 3: compleanni
- ⑥ Kahoot























# La Liberty Bell

- La prima *slot machine* fu ideata da Charles Fey nel 1898 a San Francisco.
- Per poter giocare bisogna inserire una moneta nella fessura (*payin* 1 €) e tirare una leva che aziona un meccanismo che fa girare tre ruote in maniera indipendente l'una dall'altra.
- Ciascuna ruota quindi si ferma in una determinata posizione, e si ottiene, ad esempio, la terna di simboli



# Combinazioni vincenti

1° ruota    2° ruota    3° ruota    *Payout*

			20 €
			16 €
			12 €
			8 €
			4 €
		no 	2 €

---

Altre combinazioni































---

0 €





# Composizione delle 3 ruote

1° ruota	2° ruota	3° ruota
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		



# Lancio di 3 dadi a 10 facce

1	🔔	🔔	🔔
2	Ω	Ω	◇
3	♠	♠	★
4	Ω	Ω	♠
5	◇	◇	🔔
6	Ω	Ω	◇
7	♠	♠	♡
8	Ω	Ω	★
9	♡	♡	♠
10	Ω	Ω	◇



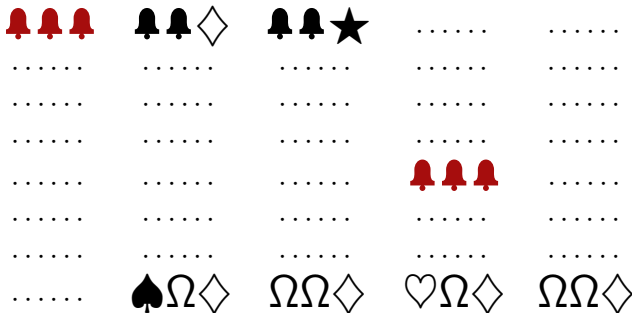
ESITO:

◇	Ω	◇
---	---	---



# Casi possibili

Casi possibili (equiprobabili):  $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$



$E = \text{"esce } \blacktriangle \blacktriangle \blacktriangle \text{"}$

$$P(E) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{2}{1000} = 2\%$$





















# Calcolo delle Probabilità

<i>Simbolo</i>	<i>Numero di simboli</i>		
	<i>Prima ruota</i>	<i>Seconda ruota</i>	<i>Terza ruota</i>
🔔	1	1	2
♥	1	1	1
◇	1	1	3
♠	2	2	2
Ω	5	5	0
★	0	0	2

$$P(\spadesuit, \Omega, \heartsuit) = \frac{2 \times 5 \times 1}{1000} = \frac{1}{100}$$



# Probabilità di vincita

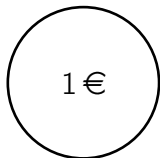
1° ruota	2° ruota	3° ruota	Probabilità	%
			2	
			1	
			3	
			8	
			50	
		no 	200	
			<b>26.4 %</b>	
Altre combinazioni			<b>74.6 %</b>	



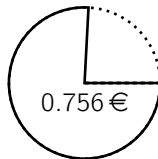
# Payout medio

$$20 \text{ €} \times \frac{2}{1000} + 16 \text{ €} \times \frac{1}{1000} + 12 \text{ €} \times \frac{3}{1000} + 8 \text{ €} \times \frac{8}{1000} + 4 \text{ €} \times \frac{50}{1000} + 2 \text{ €} \times \frac{200}{1000}$$
$$= 0.756 \text{ €}$$

*Payin*



*Payout m.*





















La scommessa è sfavorevole, è una macchinetta mangiasoldi

In media mangia  $0.244 \text{ €} \approx \frac{1}{4} \text{ €}$  a giocata



# Payout per scommessa equa (+33%)

	Probabilità	Payout	Payout equo
  	0.002	20 €	26.46 €
  	0.001	16 €	21.16 €
  	0.003	12 €	15.87 €
  	0.008	8 €	10.58 €
  	0.050	4 €	5.29 €
  no 	0.200	2 €	2.65 €



# Outline

- ① Il Calcolo delle Probabilità
- ② Scommessa equa, favorevole e sfavorevole
- ③ Problema 1: la Liberty Bell
- ④ Problema 2: la rovina del giocatore**
- ⑤ Problema 3: compleanni
- ⑥ Kahoot





# La rovina del giocatore

Se il *Bilancio medio*

$$B = \text{Payin} - \text{Payout medio}$$

di un certo gioco è negativo (la scommessa è sfavorevole), mediamente quante giocate mi occorrono per perdere il mio Capitale iniziale  $C$ ?



# Soluzione

Il capitale diviso il bilancio medio (in valore assoluto), i.e.

$$\frac{C}{|B|}$$

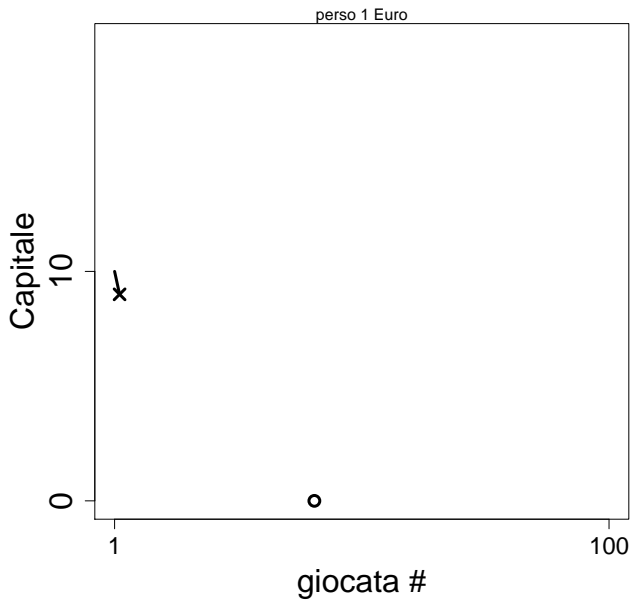


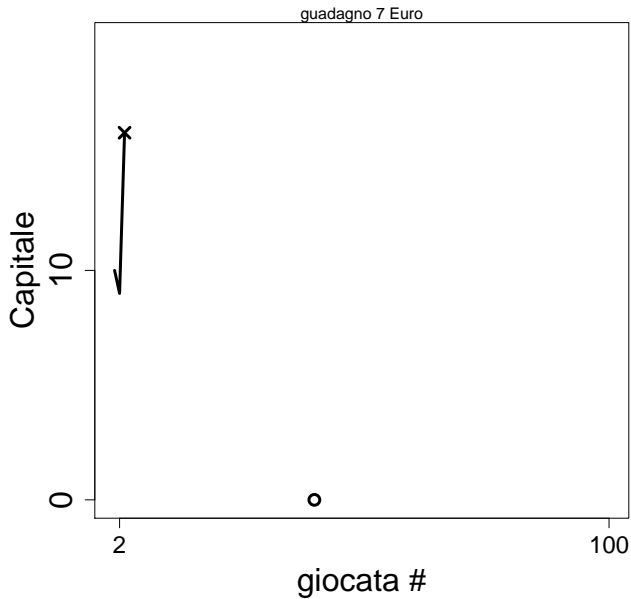
# Esempio: la Liberty Bell

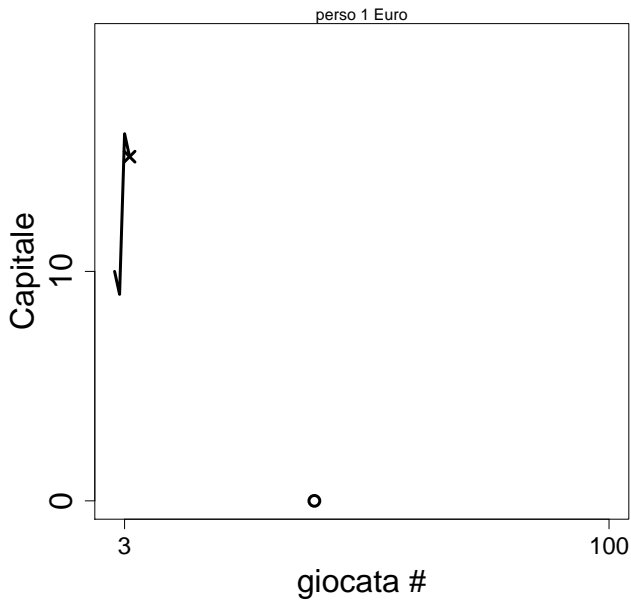
- $B = 1 \text{ €} - 0.756 \text{ €} = - 0.244 \text{ €}$
- $C = 10 \text{ €}$

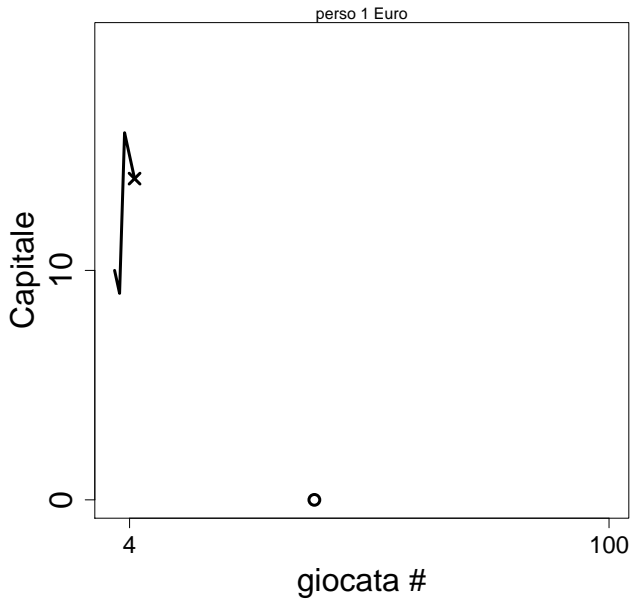
$$\frac{C}{|B|} = \frac{10}{|-0.244|} = \frac{10}{0.244} \approx 41 \text{ giocate}$$

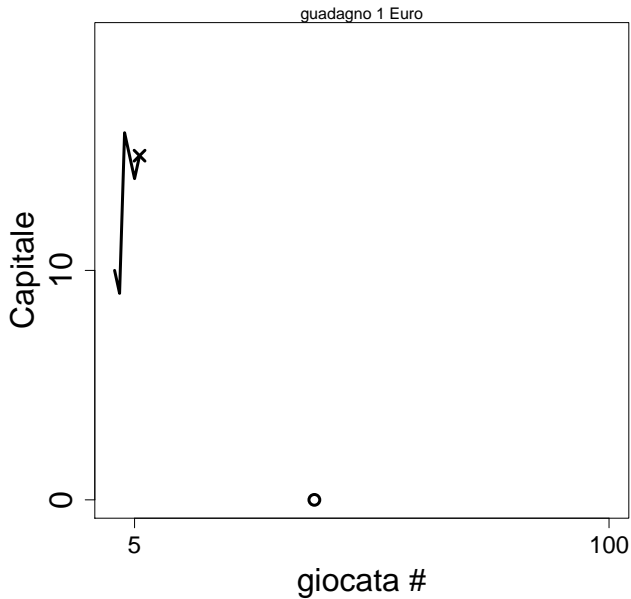




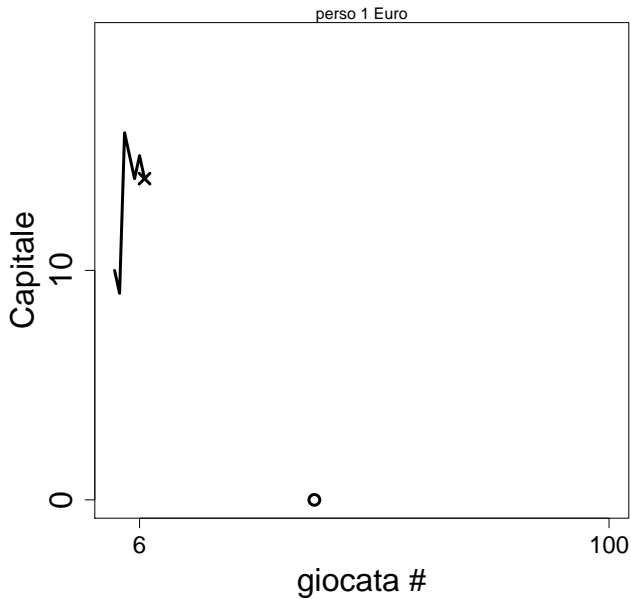


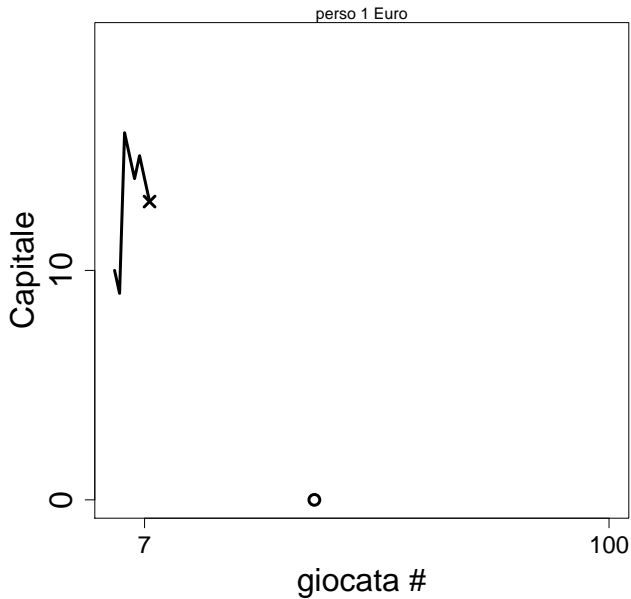


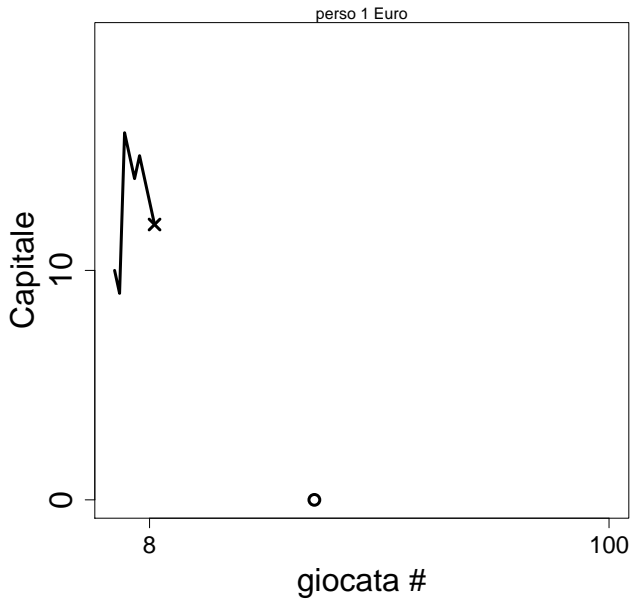


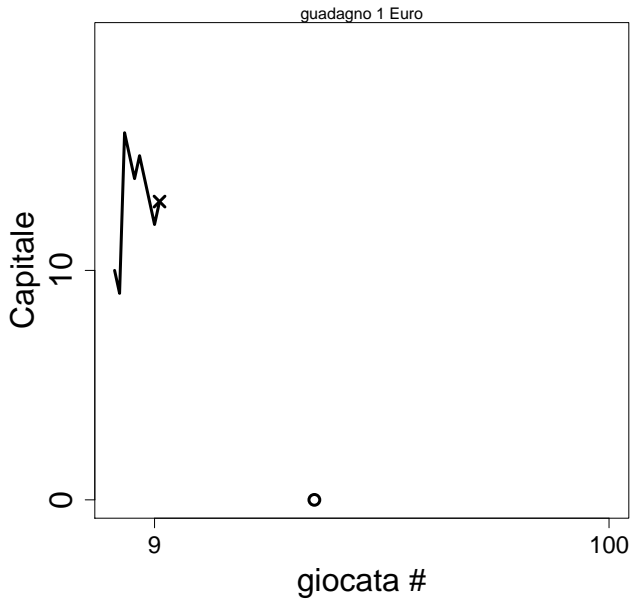


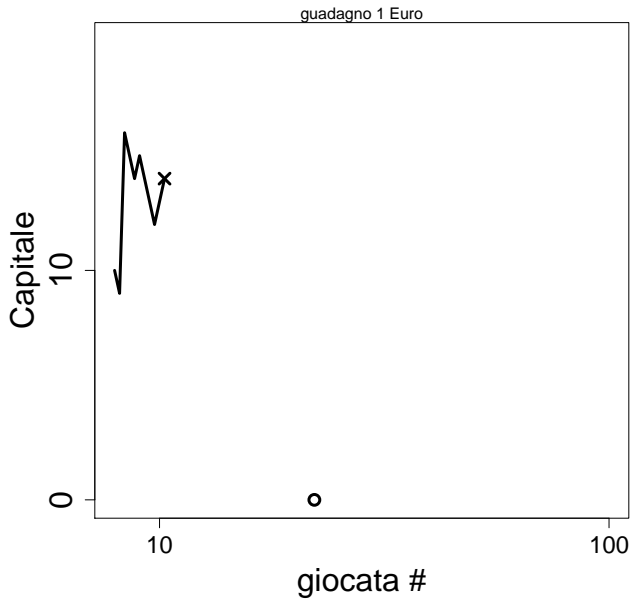


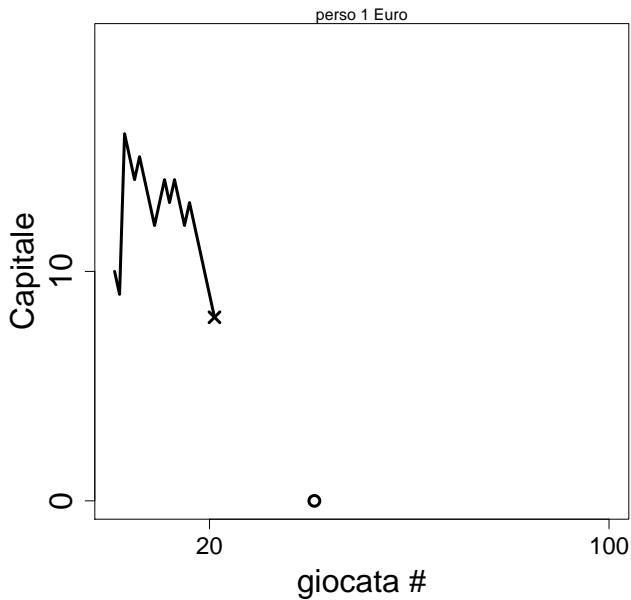


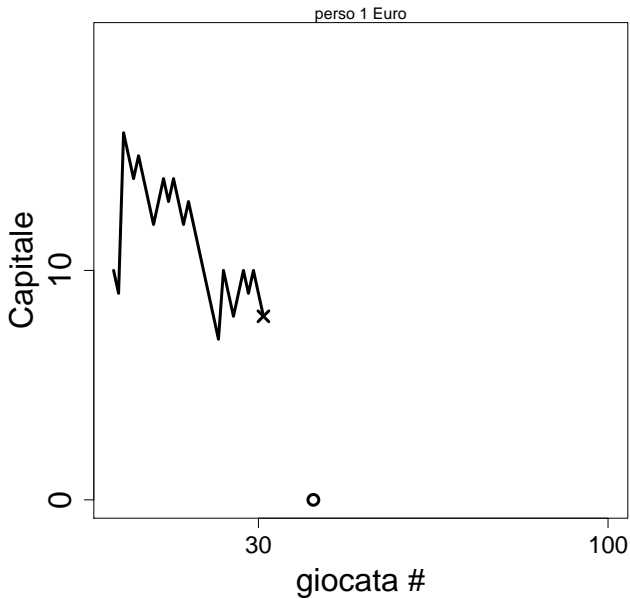


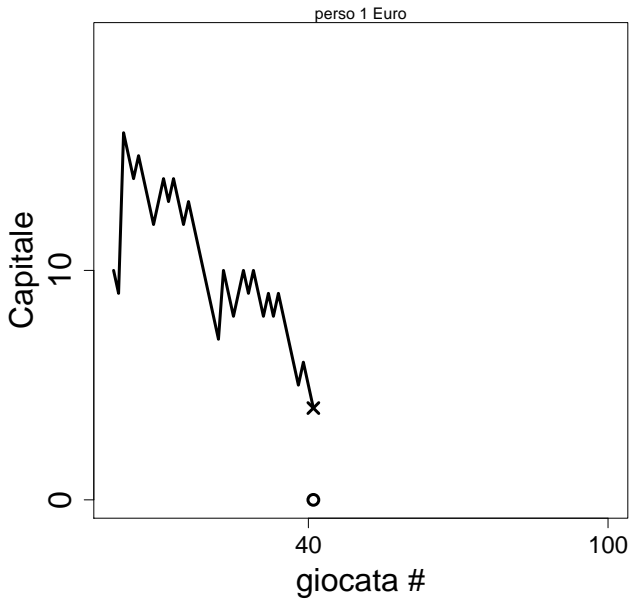




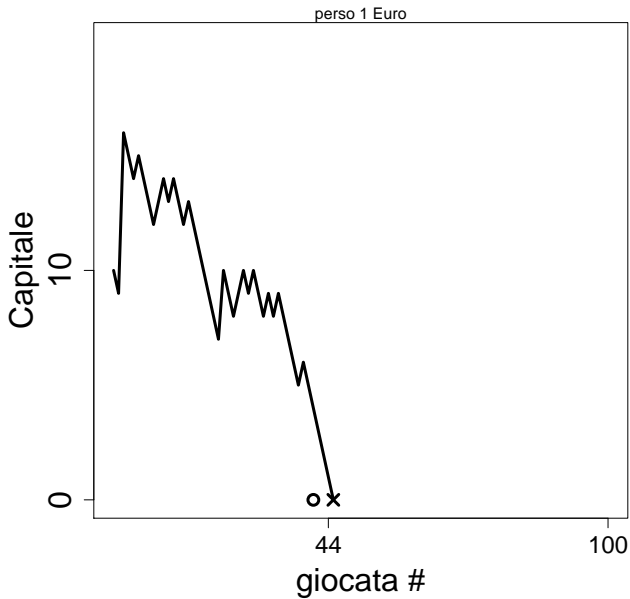


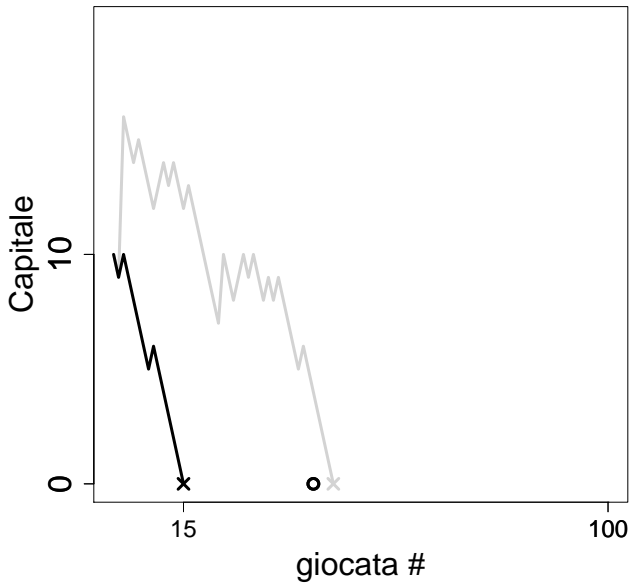


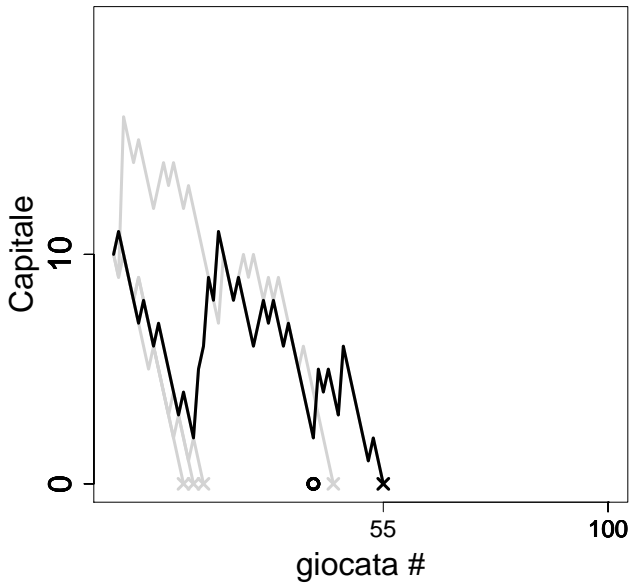


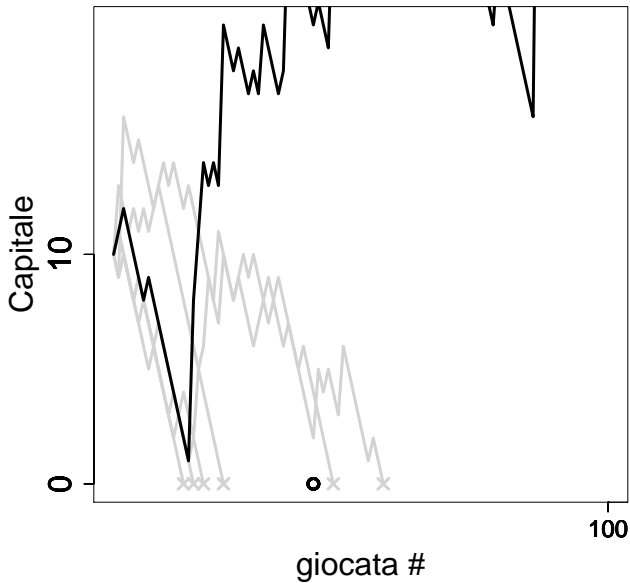














# Outline

- ① Il Calcolo delle Probabilità
- ② Scommessa equa, favorevole e sfavorevole
- ③ Problema 1: la Liberty Bell
- ④ Problema 2: la rovina del giocatore
- ⑤ Problema 3: compleanni**
- ⑥ Kahoot



# Secondo voi...

---

*Almeno **4** persone tra le presenti in quest'aula festeggiano il compleanno nello stesso giorno.*

---

**Sì.**

**No.**



# Il problema del compleanno

- Il problema o "paradosso" del compleanno afferma che la probabilità dell'evento

$E =$  "Almeno  $k$  persone in un gruppo di  $n$  festeggiano il compleanno nello stesso giorno"

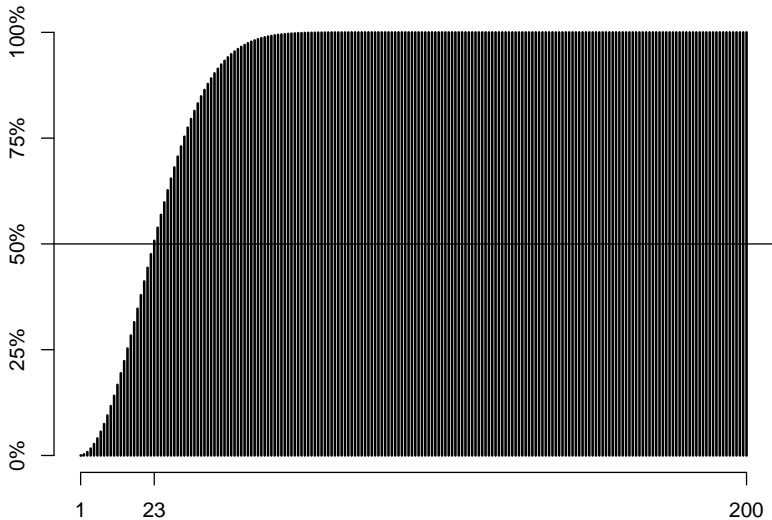
è largamente superiore a quanto potrebbe dire l'intuito

- Per ottenere  $P(E) \approx 50\%$ :
  - con  $k = 2$ , ci serve un gruppo di  $n = 23$  persone
  - con  $k = 3$ , ci serve un gruppo di  $n = 88$  persone
  - con  $k = 4$ , ci serve un gruppo di  $n = 197$  persone





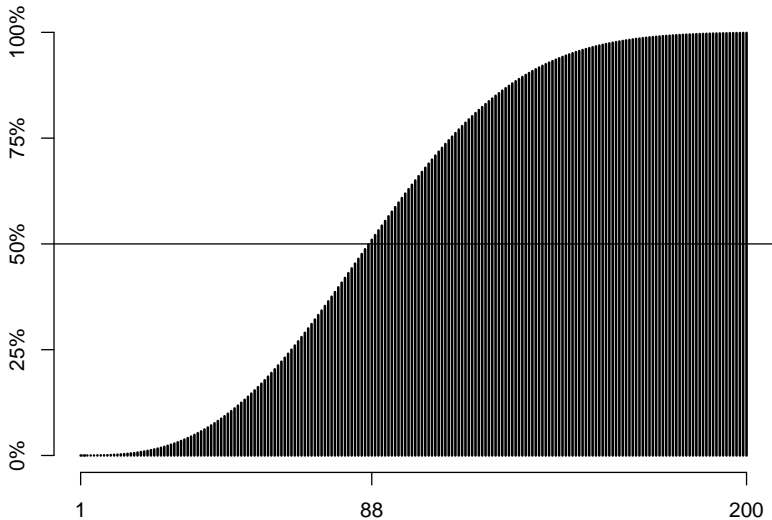
Probabilità di almeno 2 compleanni nello stesso giorno



Numero di persone presenti nell'aula



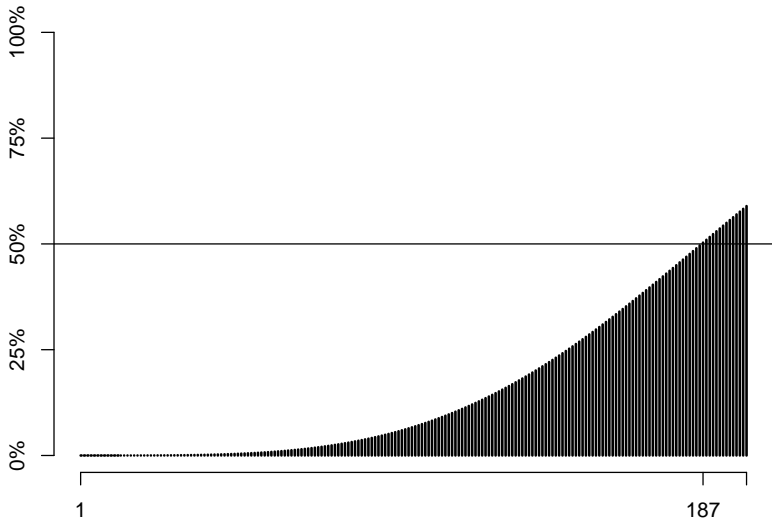
Probabilità di almeno 3 compleanni nello stesso giorno



Numero di persone presenti nell'aula



Probabilità di almeno 4 compleanni nello stesso giorno



Numero di persone presenti nell'aula



# Soluzione

- Per  $k = 2$  abbiamo

$$P(E) = 1 - \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{365}\right) \approx \exp\left(-\frac{n^2}{2 \cdot 365}\right)$$

- Per un generico  $k$ , per ottenere approssimativamente  $P(E) = p$  abbiamo bisogno di  $n$  che risolve l'equazione

$$\frac{n \exp^{-\frac{n}{365k}}}{\left(1 - \frac{n}{365(k+1)}\right)^{1/k}} = \left[365^{k-1} k! \log\left(\frac{1}{1-p}\right)\right]^{1/k}$$



# Outline

- ① Il Calcolo delle Probabilità
- ② Scommessa equa, favorevole e sfavorevole
- ③ Problema 1: la Liberty Bell
- ④ Problema 2: la rovina del giocatore
- ⑤ Problema 3: compleanni
- ⑥ Kahoot**



# Kahoot!

